

**CONCURSULUI NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”**

**ANUL ȘCOLAR 2014 - 2015**

**CLASA a IX-a**

**Filiera tehnologică - Profil tehnic ; Profil servicii**

**Brașov**

**28 februarie 2015**

1. Determinați toate tripletele de numere naturale care sunt simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică.

\*\*\*

2. a) Suma a 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice este 108. Aflați rația și cei trei termeni ai progresiei știind că pătratul termenului din mijloc este diferența pătratelor vecinilor săi.
- b) Produsul a 3 termeni consecutivi ai unei progresii geometrice este 64. Aflați rația și cei trei termeni ai progresiei știind că unul dintre cei trei termeni este produsul celorlalți doi.

Codarcea-Munteanu Lavinia

3. Se consideră punctele A, B, C necoliniare. Fie punctul  $M \in [BC]$  astfel încât  $\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{MC}$ . Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

Aurel Aldea

4. Să se calculeze următoarea sumă, iar apoi să se demonstreze rezultatul obținut prin inducție matematică :

$$S = 1 + 2 \cdot (1 + 2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3) + \dots + n \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) .$$

Sorina Stoian

Notă:

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

**CONCURSULUI NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”**

**ANUL ȘCOLAR 2014 - 2015**

**CLASA a X-a**

**Filiera tehnologică - Profil tehnic ; Profil servicii**

**Brașov**

**28 februarie 2015**

1. Există valori reale  $x$  pentru care numerele  $\log_2(x-5)$ ,  $\log_2(x+7)$ ,  $\log_2(7x+1)$  să fie în progresie aritmetică?

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

2. Arătați că dacă  $z \in \mathbb{C}$  este de modul 1, atunci numărul  $\frac{z}{1+z^2}$  este real.

\*\*\*

3. Să se calculeze suma

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2016i^{2015}$$

Codarcea-Munteanu Lavinia

4. Smaranda alege un număr natural  $a$ , știind că apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv  $x$ . Dacă  $A = 10 - \log_2(x^2)$  sau  $B = \log_2(16 \cdot x)$  este cel puțin egal cu  $a$ , atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de  $3^a$  lei. Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a primi un cadou cât mai valoros?

Camelia Moldovan

Notă:

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

**CONCURSULUI NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”**

**ANUL ȘCOLAR 2014 - 2015**

**CLASA a XI-a**

**Filiera tehnologică - Profil tehnic ; Profil servicii**

**Brașov**

**28 februarie 2015**

1. a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x^n + x + 1}{\sqrt{2x^4 + x^2 + 1}}$  ;  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Să se determine numerele reale  $a, b \in \mathbb{R}$  a.î.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3 + x + 1}{2x^2 - x + 2} - Ax + B \right) = \frac{5}{4}$ .

Codarcea-Munteanu Lavinia

2. Există matrice pătrate de ordinul doi cu coeficienți întregi  $X$  astfel încât

$$X^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}?$$

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

3. Fie matricea  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$  unde  $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} i; i \neq j \\ (-1)^{i-1} j; i = j \end{cases}$

a) Să se calculeze  $A^2$ .

b) Să se determine matricea  $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{15}$ .

c) Să se calculeze  $A^n, n \in \mathbb{N}$ .

Aurel Aldea

4. Determinați  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + 1 - \sqrt{x^2 - ax + 3} \right)$  în funcție de valorile parametrului real  $a$ .

Notă:

\*\*\*

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

**CONCURSULUI NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”**

**ANUL ȘCOLAR 2014 - 2015**

**CLASA a XII-a**

**Filiera tehnologică - Profil tehnic ; Profil servicii**

**Brașov**

**28 februarie 2015**

1. Fie  $a > 0$  și funcțiile  $f, F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$ ,  $F(x) = \ln(a + \ln x)$ .
- a) Arătați că  $F$  este o primitivă a lui  $f$  pe intervalul  $[1, +\infty)$ .
- b) Pentru  $a = 2$ , determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  pe intervalul  $[1, +\infty)$  cu proprietatea că  $F(e^2) = \ln 4$ .

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

2. Fie funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

a) Să se calculeze  $f(x) - f'(x)$

b) Să se calculeze  $\int \frac{5x^3}{x^3 + 3x^2 + 6x + 6} dx, x \in (0, \infty)$

Aurel Aldea

3. Fie  $M = \{2, 4, 8, 16\}$  și legea de compoziție  $x \circ y = \begin{cases} y + |x - y| \lceil \log_x y \rceil, & y \in \{2, 4\} \\ x - (x - y) \lceil \log_y x \rceil, & y \in \{8, 16\} \end{cases}$ ,

unde  $\lceil a \rceil$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ . Arătați că  $M$  este parte stabilă în raport cu operația de mai sus.

\*\*\*

4. Se consideră legea de compoziție  $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ,  $(\forall) x, y \in [1, \infty)$ .

a) Arătați că legea „ $\circ$ ” este asociativă;

b) Să se determine elementele simetrizabile din mulțimea  $[1, \infty)$ .

Camelia Moldovan

Notă: - Timp de lucru 3 ore.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.